

یک روش موضعی بهینه در تفکیک پذیری چندگانه مدل‌های هموار

فرامرز فامیل سماواتی*، نظام‌الدین مهدوی امیری**

*بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه کالگری، کانادا
**دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

یک روش جدید برای نمایش مدل‌های گرافیکی با تفکیک‌پذیری چندگانه ارائه می‌کنیم. مدل‌های مورد نظر، از نوع منحنی، تصویر و رویه هستند. این روش مبتنی بر یک رهیافت گسسته به نظریه موجک‌هاست. تفکیک‌پذیری چندگانه کاربردهای متنوعی در گرافیک کامپیوتری و پردازش تصاویر دارد که از آن جمله می‌توان از فشرده‌سازی و هموارسازی تصاویر، ویرایش مدل‌های گرافیکی و تبدیل اسکن نام برد. تمرکز اصلی ما بر روش تطریف چیکین است که برای تولید مدل‌های هموار کاربرد دارد. در این روش از تصویرسازی بهینه مدل یا یک تفکیک‌پذیری بر روی فضای با تفکیک‌پذیری کمتر استفاده می‌شود. این بهینه‌سازی به صورت گسسته و موضعی است و مسوچک حاصل از نوع دو متعامد است. با مثال‌های متنوع کارایی عملیات تجزیه و ترکیب حاصل از این روش را مشخص می‌کنیم.

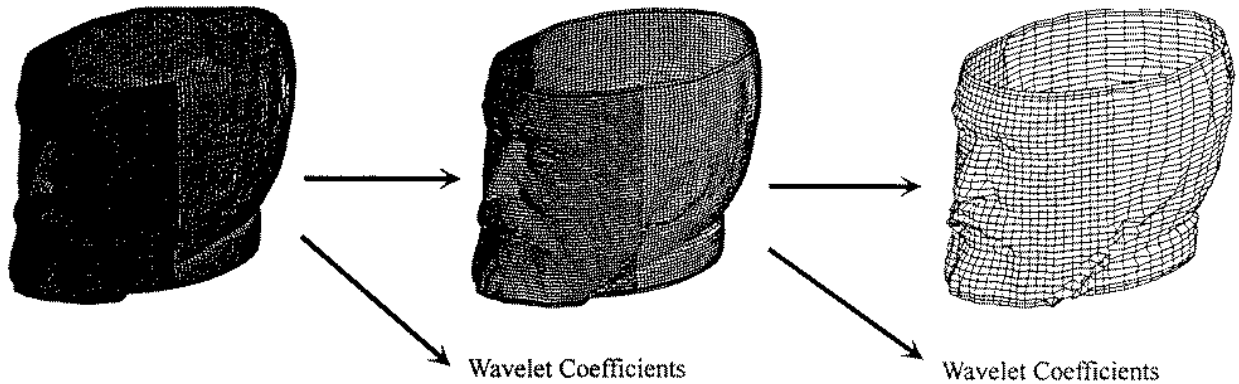
کلمات کلیدی: تفکیک‌پذیری چندگانه، موجک، تطریف، بی-اسپلاین و کمترین مربعات، دو متعامد.

۱- مقدمه

گرافیک کامپیوتری ایجاد شده‌اند [۵، ۶]. همچنین تجزیه‌های متوالی رهیافتی برای حل مسئله تبدیل اسکن به دست می‌دهند [۱۰]. موجک هار^۱ به عنوان اولین و ساده‌ترین موجک شناخته شده است [۱۰]. ویسی کاستی عمده آن استفاده از توابع پایه‌ای ناپیوسته است. دابچی^۲ در [۳] موجک‌های پیوسته را معرفی کرد. این نوع موجک‌ها در پردازش سیگنال‌ها کاربردهای فراوانی یافته‌اند. نکته جالب توجه در توابع موجک دابچی پیوستگی آنها در سرتاسر دامنه و در عین حال مشتق‌ناپذیری آنهاست. از این‌رو، توابع موجک دابچی در بعضی از کاربردها، مانند گرافیک کامپیوتری، مناسب نیستند. امروزه، موجک‌های بی-اسپلاین به واسطه هموار بودن توابع پایه آنها، اهمیت فراوانی یافته‌اند. در [۲، ۱۰] روش‌هایی برای نمایش تفکیک‌پذیری چندگانه حاصل از بی-اسپلاین‌ها و محاسبه موجک‌های آن مطرح شده‌اند، ولی این روش‌ها در عمل پیچیده‌تر از روش‌های حاصل از موجک هار و دابچی هستند. در [۱۱] مسئله تفکیک‌پذیری چندگانه به صورت یک نمایش کاملاً ماتریسی مطرح شده است. در [۹] با استفاده از نمایش ماتریسی و بهینه‌سازی گسسته، یک روش کارا و ساده

تفکیک‌پذیری چندگانه^۱ ساختاری است که نمایش یک مدل از جسم را با تشکیل دو عامل مستقل ابزار می‌دارد: (۱) تقریب جسم در تفکیک‌پذیری پایین و (۲) جزئیات از دست رفته در این تقریب. معمولاً اطلاعات مربوط به جزئیات از دست رفته را با ضرایب توابع پایه‌ای به نام موجک^۲ نمایش می‌دهند. نحوه انتخاب این ضرایب بر کارایی و کیفیت نمایش تفکیک‌پذیری چندگانه تأثیر مستقیم دارد. برای نمونه، شکل ۱ دو مرحله از نمایش تفکیک‌پذیری مربوط به تصویری از مجسمه سر ویکتور هوگو را مشخص می‌کند.

تفکیک‌پذیری چندگانه کاربردهای متنوعی دارد. در پردازش تصاویر با استفاده از تجزیه‌های متوالی و بهره‌گیری از تقریب‌های مناسب و برخی عناصر تعیین‌کننده دیگر در ضرایب موجک به فشرده‌سازی‌های مؤثری دست یافته‌اند [۴]. به عنوان مثال، برای ذخیره‌سازی اثر انگشت در سازمان اف‌بی‌آی^۳ در آمریکا و همین‌طور در قالب گرافیکی جی‌پی‌گ^۴، این نوع فشرده‌سازی به کار گرفته شده است. به علاوه، با بهره‌گیری از این نمایش، امکانات متنوعی برای ویرایش، کنترل و تصحیح مدل‌ها در



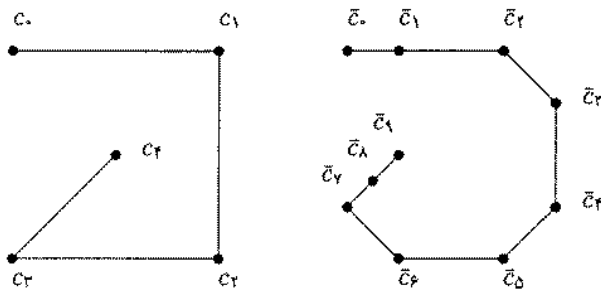
شکل ۱- دو مرحله از نمایش تفکیک پذیری

با استفاده از (۱) عملیات تجزیه و ترکیب را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد

$$\begin{bmatrix} A^k \\ B^k \end{bmatrix} C^{k+1} = \begin{bmatrix} C^k \\ E^k \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} P^k & Q^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^k \\ E^k \end{bmatrix} = C^{k+1}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} A^k \\ B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^k & Q^k \end{bmatrix} = I. \quad (4)$$



شکل ۲- یک مرحله از تفکیک پذیری و نمایش قطع گوشه‌ها

بنابراین با در دست داشتن ماتریسهای P^k, Q^k, A^k و B^k اعمال تجزیه (۲) و ترکیب (۳) به سادگی قابل انجام هستند، ولی تنها P^k ساختار معینی دارد و Q^k, B^k و A^k به روش مورد استفاده وابسته هستند. در عمل، وجود ویژگی‌هایی مانند نواری بودن با طول نوار کوتاه و سادگی درایه‌های این ماتریسها مطلوب هستند. در [۹] ایده استفاده از روش کمترین مربعات (LS) مطرح شده است، به این صورت که C^k کمینه کننده

$$\|C^{k+1} - P^k C^k\|_2 \quad (5)$$

و E^k جواب دستگاه

$$Q^k E^k = C^{k+1} - P^k C^k$$

برای محاسبه تفکیک‌پذیری‌های چندگانه و موجک‌های بی-اسپلاین ارائه شده است (شکل ۱ با استفاده از این روش حاصل شده است). این روش براساس مدل‌های کمترین مربعات سراسری ساخته شده است. در اینجا روشی ارائه می‌کنیم که مسئله تفکیک‌پذیری چندگانه و موجک وابسته به تقریف^۲ چیکین^۱ را با بهینه‌سازی موضعی حل می‌کند. روش حاصل از جهت سادگی با روش هار قابل مقایسه است. توجه داریم که تقریف چیکین روشی برای تولید مدل‌های بی-اسپلاین درجه دوم یکنواخت است. این نوع مدلها مشتق‌پذیر هستند، و نتیجتاً موجک حاصل از این روش نیز مشتق‌پذیر است.

۲- تقریف و نمایش ماتریسی

یکی از کارآمدترین روشهای تولید رویه و منحنی روش تقریف است. در این روش با به کار بردن عمل ظریف‌سازی متوالی نقاط کنترلی، یک تقریب گسسته از مدل به دست می‌آورند. عمل تقریف معمولاً به وسیله یک ماتریس مشخص می‌شود. اگر C^k نقاط کنترلی در مرحله k ام و C^{k+1} نقاط حاصل پس از یک عمل تقریف روی C^k باشد، آنگاه داریم:

$$C^{k+1} = P^k C^k, \quad (1)$$

که در آن C^k یک بردار n تایی، C^{k+1} یک بردار m تایی و P^k یک ماتریس $(m \times n)$ ، به نام ماتریس تقریف است. در واقع C^k تقریبی از یک تابع در تفکیک‌پذیری پایین و C^{k+1} تقریبی از همان تابع در تفکیک‌پذیری بالا را نشان می‌دهد. هر چند P^k به مرحله k وابسته است ولی معمولاً یک ماتریس نواری است و ستونهای آن از انتقال صفر در یک ستون ثابت به وجود می‌آیند (احتمالاً به استثنای چند ستون اول و آخر). بدین ترتیب، این ماتریس برای هر k به سادگی قابل تولید است.

کار اصلی تفکیک‌پذیری چندگانه، عمل تجزیه C^{k+1} به تقریب C^k و عامل خطای E^k (ضرایب موجک) است. البته، برای کارایی عوامل ساخته شده خواص ذیل مطلوب هستند:

۱- C^k تقریب مناسبی از C^{k+1} باشد.

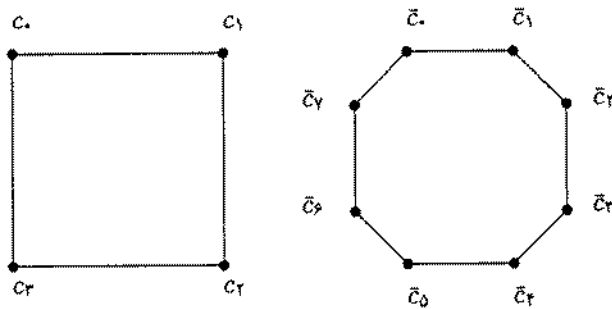
۲- اندازه حافظه مورد نیاز برای ذخیره C^k و E^k بیشتر از C^{k+1} نباشد.

۳- مقدار زمان مورد نیاز برای عمل تجزیه C^{k+1} به C^k و E^k نسبت به m خطی باشد.

۴- مقدار زمان مورد نیاز برای عمل بازسازی C^{k+1} از روی C^k و E^k نسبت به m خطی باشد.

توجه داریم که P^k نواری است و ستونهای این ماتریس، به غیر از ستونهای اول و آخر، به صورت کلی $\left[0, \dots, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0\right]^T$ هستند. به عبارت دیگر، این ستونها از انتقال صفر در یک ستون ثابت ایجاد می‌شوند. از آنجا که نقاط حاصل از نظریف چیکین به یک منحنی بی-اسپلاین درجه دوم میل می‌کنند، منحنی حدی این نظریف، هموار یا C^1 است [۸].

برای این نظریف در حالت تناوبی توجه داریم که نقطه کنترلی آخر بر روی نقطه اول منطبق است (به شکل ۳ نگاه کنید). روابط کلی برای نظریف شکل ۳ در (۸) آمده‌اند:



شکل ۳- مرحله اول نظریف تناوبی چیکین

$$\begin{cases} \bar{c}_{2i} = \frac{3}{4}c_i + \frac{1}{4}c_{i+1} \\ \bar{c}_{2i+1} = \frac{1}{4}c_i + \frac{3}{4}c_{i+1} \\ \bar{c}_{2n} = \frac{3}{4}c_{n-1} + \frac{1}{4}c_0 \\ \bar{c}_{2n+1} = \frac{1}{4}c_{n-1} + \frac{3}{4}c_0 \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8)$$

نتیجتاً ماتریس نظریف زیر حاصل می‌شود:

$$P^k = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

مجدداً P^k ساختاری نواری دارد و ستونهای آن از انتقال صفر در یک ستون ثابت به وجود می‌آیند. منحنیهای بسته و C^1 را به آسانی می‌توان با استفاده از نظریف تناوبی چیکین تولید نمود. برای مثال، در شکل ۴ سه مرحله از این گونه نظریفها مشخص شده‌اند.

در نظر گرفته می‌شوند و در آن Q^k با توجه به P^k و با خواص زیر تعیین می‌شود:

- ستونهای Q^k یک پایه برای فضای بوج P^{kT} باشد.
 - Q^k نواری با طول نوار اندک باشد.
 - ستونهای Q^k از انتقال صفرهای یک ستون ثابت به وجود آیند (مانند P^k).
- هر چند در این روش مستقیماً نیازی به دانستن A^k و B^k نیست ولی به هر حال این ماتریسها پر^{۱۱} خواهند بود. به علاوه، در مسئله (۵) برای نمایش تفکیک پذیری چندگانه رویه‌ها با توپولوژی دلخواه (غیر تانسوری) با دستگاهی با ماتریس ضرایب پر صفر یا تنک^{۱۱} (نه لزوماً نواری) مواجه می‌شویم و در نتیجه امکان خطی بودن عمل تجزیه از دست می‌رود.
- برای رفع مشکلات ابراز شده، با استفاده از منحنی چیکین و یک روش موضعی، A^k و B^k در (۲) را به صورت نواری تولید می‌کنیم.

۳- نظریف چیکین

نظریف چیکین یکی از نظریفهای ساده و کارآمد است که اولین بار در [۱] معرفی شده است. از دیدگاه هندسی، این نظریف یک روش گوشه برشی است. در شکل ۲ گوشه‌های مربوط به c_1 ، c_2 و c_3 بریده شده‌اند (برای ساده‌سازی، نماد c_i^k را با c_i و c_i^{k+1} را با \bar{c}_{i+1} جایگزین کرده‌ایم).

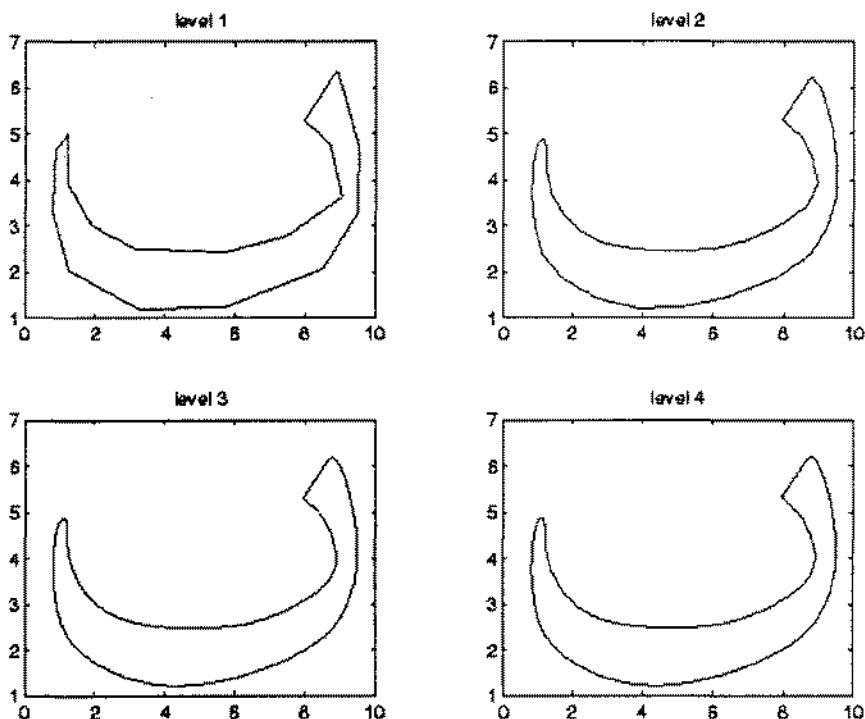
در این روش ابتدا دو نقطه جدید بر روی هر پاره‌خط به نسبت‌های $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ تعیین می‌شوند، سپس نقطه دوم هر پاره‌خط به نقطه اول پاره‌خط بعدی متصل می‌شود. نقاط ایجاد شده با نسبت‌های مزبور، نقطه آغازی پاره‌خط اول و نقطه پایانی پاره‌خط آخر مجموعه نقاط جدید را تشکیل می‌دهند.

بنابراین قاعده نظریف چیکین برای رئوس کنترلی $[c_0, c_1, \dots, c_n]^T$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = c_0 \\ \bar{c}_{2i+1} = \frac{3}{4}c_i + \frac{1}{4}c_{i+1} \\ \bar{c}_{2i+2} = \frac{1}{4}c_i + \frac{3}{4}c_{i+1} \\ \bar{c}_{2n+1} = c_n \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

و در نتیجه ماتریس این نظریف به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$P^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$



شکل ۴- سه مرحله از نظریف تناوبی چیکین

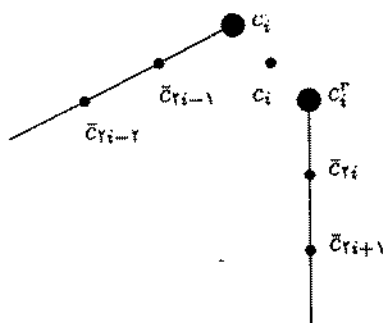
۴- وارون موضعی نظریف چیکین

برای تعیین ماتریسهای Q^k ، A^k و B^k ، ابتدا روشی برای وارون موضعی نظریف چیکین مطرح می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۸) به ازای $i-1$ و i به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} c_i^l = \frac{3}{2}\bar{c}_{2i-1} - \frac{1}{2}\bar{c}_{2i-2} \\ c_i^r = \frac{3}{2}\bar{c}_{2i} - \frac{1}{2}\bar{c}_{2i+1} \end{cases} \quad (12)$$

واضح است که اگر \bar{c}_i ها حاصل از نظریف باشند، آنگاه $c_i^L = c_i^T = c_i$ و لی

در حالت کلی c_i^L با c_i^r مساوی نیست که در این صورت c_i را با $\frac{1}{2}(c_i^L + c_i^r)$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد که این تعریف بهترین انتخاب از نوع (LS) است.



شکل ۵- یک وضعیت برای وارون موضعی نظریف چیکین

با کمک روابط (۱۲) به دست می‌آوریم:

$$c_i = \frac{1}{2}(c_i^L + c_i^r) = -\frac{1}{4}\bar{c}_{2i-2} + \frac{3}{4}\bar{c}_{2i-1} + \frac{3}{4}\bar{c}_{2i} - \frac{1}{4}\bar{c}_{2i+1} \quad (13)$$

از طرف دیگر، اگر c_i خطای موضعی وابسته به c_i را به صورت $c_i - c_i^l$ تعریف کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{c}_{2i-2} = \frac{3}{4}c_{i-1} + \frac{1}{4}c_i \\ \bar{c}_{2i-1} = \frac{1}{4}c_{i-1} + \frac{3}{4}c_i \\ \bar{c}_{2i} = \frac{3}{4}c_i + \frac{1}{4}c_{i+1} \\ \bar{c}_{2i+1} = \frac{1}{4}c_i + \frac{3}{4}c_{i+1} \end{cases} \quad (11)$$

می‌دانیم که برای عمل نظریف، فرض بر آن است که c_i ها داده شده‌اند و محاسبه \bar{c}_i ها مورد نظر هستند. حال، به منظور ایجاد رهیافتی برای دست‌یابی به یک تفکیک‌پذیری پایین از یک تفکیک‌پذیری بالاتر، فرض می‌کنیم که \bar{c}_i ها داده شده‌اند و می‌خواهیم c_i ها را به دست آوریم (البته لزومی ندارد که \bar{c}_i ها از یک عمل نظریف حاصل شده باشند).

یک وضعیت ممکن در شکل ۵ مشاهده می‌شود. با توجه به این شکل درمی‌یابیم که برای c_i دو جایگزین مناسب می‌توان یافت. با استفاده از \bar{c}_{2i-2} و \bar{c}_{2i-1} و حل دستگاه (۱۰) جایگزین اول تعیین می‌شود که آن را با c_i^l نمایش می‌دهیم. به طور مشابه، با استفاده از \bar{c}_{2i} و \bar{c}_{2i+1} و حل (۱۱) جایگزین دوم تعیین می‌شود که آن را با c_i^r نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$\begin{cases} c_n^l = \frac{3}{2}\bar{c}_{2n} - \frac{1}{2}\bar{c}_{2n-1} \\ c_n^r = \bar{c}_{2n+1} \end{cases}$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} c_n = -\frac{1}{4}\bar{c}_{2n-1} + \frac{3}{4}\bar{c}_{2n} + \frac{1}{2}\bar{c}_{2n+1} \\ e_n = c_n - c_n^l = \frac{1}{4}\bar{c}_{2n-1} - \frac{3}{4}\bar{c}_{2n} + \frac{1}{2}\bar{c}_{2n+1} \end{cases} \quad (19)$$

روابط (۱۹) در عمل تجزیه مورد استفاده واقع می‌شوند. از طرف دیگر،

$$\bar{c}_{2n+1} = c_n + e_n \quad (20)$$

که در ترکیب بکار می‌رود.

در مورد نظریه چیکین تناوبی نیز نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{3}{4}\bar{c}_0 - \frac{1}{4}\bar{c}_1 - \frac{1}{4}\bar{c}_{2n} + \frac{3}{4}\bar{c}_{2n+1} \\ e_0 = \frac{3}{4}\bar{c}_0 - \frac{1}{4}\bar{c}_1 + \frac{1}{4}\bar{c}_{2n} - \frac{1}{4}\bar{c}_{2n+1} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \bar{c}_{2n+1} = \frac{3}{4}c_0 + \frac{1}{4}c_{n-1} - \frac{3}{4}e_0 + \frac{1}{4}e_{n-1} \\ \bar{c}_{2n} = \frac{1}{4}c_0 + \frac{3}{4}c_{n-1} - \frac{1}{4}e_0 + \frac{3}{4}e_{n-1} \end{cases} \quad (22)$$

۶- نمایش ماتریسی

با توجه به روابط تجزیه و ترکیب و شرایط مرزی، نمایش ماتریسی یعنی P^k ، A^k ، Q^k و B^k ارائه می‌شوند:

الف) حالت غیرتناوبی، با توجه به روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۶) و شرایط مرزی (۱۷)، (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

به سادگی می‌توان درستی روابط $AQ = 0$ ، $AP = I$ ، $BQ = I$ و $BP = 0$ را بررسی نمود.

ب) حالت تناوبی. با تأثیر دادن شرایط مرزی (۲۱) و (۲۲) در ماتریسهای (۲۳) و (۲۴) ماتریسهای (۲۵) و (۲۶) حاصل می‌شود. این ماتریسها و روابط

$$e_i = c_i - c_i^l = -\frac{1}{4}\bar{c}_{2i-2} - \frac{3}{4}\bar{c}_{2i-1} + \frac{3}{4}\bar{c}_{2i} - \frac{1}{4}\bar{c}_{2i+1} \quad (14)$$

روابط (۱۳) و (۱۴) برای عمل تجزیه به کار می‌روند. به منظور دست‌یابی به روابط لازم برای عمل ترکیب، با توجه به تعریف c_i^l و c_i^r داریم:

$$\begin{cases} \bar{c}_{2i} = \frac{3}{4}c_i^r + \frac{1}{4}c_{i+1}^l \\ \bar{c}_{2i+1} = \frac{1}{4}c_i^r + \frac{3}{4}c_{i+1}^l \end{cases} \quad (15)$$

از طرف دیگر، می‌دانیم $c_i^r = c_j + e_j$ و $c_{i+1}^l = c_{i+1} - e_{i+1}$. با جایگذاری روابط اخیر در (۱۵) به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \bar{c}_{2i} = \frac{3}{4}c_j + \frac{1}{4}c_{j+1} + \frac{3}{4}e_j - \frac{1}{4}e_{j+1} \\ \bar{c}_{2i+1} = \frac{1}{4}c_j + \frac{3}{4}c_{j+1} + \frac{1}{4}e_j - \frac{3}{4}e_{j+1} \end{cases} \quad (16)$$

بنابراین، عملیات تجزیه و ترکیب بدین صورت خلاصه می‌شوند:

- تجزیه: با در دست داشتن \bar{c}_j ها و با استفاده از (۱۳) و (۱۴) c_j ها، تقریب موضعی مسدل، در تفکیک‌پذیری پایین و e_j ها، خطای موضعی یا ضرایب موجک، تعیین می‌شوند.
- ترکیب: با در دست داشتن c_j ها و e_j ها و با استفاده از رابطه (۱۶)، \bar{c}_j ها به طور کامل و دقیق بازسازی می‌شوند.

۵- روابط تجزیه و ترکیب برای ستونهای مرزی

در روش غیر تناوبی چیکین با توجه به رابطه (۶) درمی‌یابیم:

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = c_0 \\ \bar{c}_1 = \frac{3}{4}c_0 + \frac{1}{4}c_1 \\ \bar{c}_2 = \frac{1}{4}c_0 + \frac{3}{4}c_1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{cases} c_0^l = \bar{c}_0 \\ c_0^r = \frac{3}{2}\bar{c}_1 - \frac{1}{2}\bar{c}_2 \end{cases}$$

از آنجا که $c_0 = \frac{1}{2}(c_0^l + c_0^r)$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}\bar{c}_0 + \frac{3}{4}\bar{c}_1 - \frac{1}{4}\bar{c}_2 \\ e_0 = c_0 - c_0^l = -\frac{1}{2}\bar{c}_0 + \frac{3}{4}\bar{c}_1 - \frac{1}{4}\bar{c}_2 \end{cases} \quad (17)$$

از رابطه (۱۷) برای تعیین نقاط ابتدایی در تجزیه استفاده می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به روابط $c_0^l = c_0 - e_0$ و $c_0^r = c_0^l$ به دست می‌آوریم:

$$\bar{c}_0 = c_0 - e_0 \quad (18)$$

رابطه (۱۸) برای ترکیب استفاده می‌شود.

در خصوص نقاط انتهایی، با روشی مشابه نتیجه می‌شود:

$$[P | Q] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 0 & & 3 & -1 & 0 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 1 & 3 & & & 1 & -3 & & \\ 4 & 4 & 0 & & 4 & 4 & & \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & 3 & -1 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 0 & 1 & 3 & & 0 & 1 & -3 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 0 & 0 & 3 & & 0 & 0 & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & -1 \\ & & & & 4 & & & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & & & -3 \\ & & & & 4 & & & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 & & -1 \\ & & & & 4 & 4 & & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & & -3 \\ & & & & 4 & 4 & & 4 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & & -1 \\ 4 & & & & 4 & & & 4 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & -3 \\ 4 & & & & 4 & & & 4 \end{array} \right] \quad (26)$$

$$[P | Q] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 0 & & 3 & -1 & 0 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 1 & 3 & & & 1 & -3 & & \\ 4 & 4 & 0 & & 4 & 4 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & 3 & -1 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 0 & 1 & 3 & & 0 & 1 & -3 & \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & \\ 0 & 0 & 3 & & 0 & 0 & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & & & -1 & & & 0 \\ 4 & & & & 4 & & & -3 \\ 3 & 0 & & & 4 & & & 4 \\ 4 & & & & 3 & & & -1 \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & 4 \\ 1 & 3 & & & 1 & -3 & & -3 \\ 4 & 4 & & & 4 & 4 & & 4 \\ 0 & 1 & & & 0 & 1 & & -3 \\ & & & & 4 & 4 & & 4 \end{array} \right] \quad (24)$$

تجزیه و ترکیب وابسته به آنها از جهت سادگی با تبدیل هار [۱۰] قابل مقایسه‌اند. ضمناً توابع پایه وابسته به این ماتریسها بی-اسیلاین درجه دوم و موجک آن C^1 (هموار) هستند. بنابراین مزیت روش ما در مقایسه با روشهای هار و دابچی در این است که موجکهای حاصل مشتقپذیرند. طبیعی است که استفاده از رابطه (۱۲) برای تعیین C_2 ها لزوماً به بهترین انتخاب سراسری C_2 ها منجر نمیشود، ولی تقریب حاصل از آن در مسائل علمی قابل قبول است. در واقع توابع پایه و موجک مورد استفاده، دقیقاً متعامد نیستند بلکه تعامد به صورت تقریبی برقرار می‌شود. این نوع موجکها به دو متعامد^{۱۱} مشهور هستند. این رهیافت موضعی به حل مسئله تفکیک‌پذیری چندگانه را می‌توان به رویه‌هایی با توپولوژی دلخواه نیز تعمیم داد.

مسئله اخیر به عنوان یکی از معضلات گرافیکی کامپیوتری شناخته شده است [۷]، که البته امکان حل آن بر کارایی رهیافت ارائه شده ما می‌افزاید.

۷- نتایج آزمون

کارایی روش ارائه شده را در دو نمونه از نوع منحنی و تصویر مشاهده می‌کنیم. در شکل ۶ نمونه سمت چپ نقاط حاصل از اسکن (۵۱۲ نقطه)، نمونه میانی بازسازی مدل با تقریب حاصل از رابطه (۱۲) پس از سه بار تجزیه (۶۴ نقطه) و نمونه سمت راست بازسازی مدل با تقریب حاصل از بهینه‌سازی سراسری پس از سه بار تجزیه را مشخص می‌کنند. در هر دو نمونه، ضرایب موجک (e_j) حذف شده‌اند.

در شکل ۷ نمونه سمت چپ و بالا تصویر اصلی \bar{c} (۲۵۶×۲۵۶)، بالا و راست C_2 پس از دو بار تجزیه (۶۴×۶۴)، نمونه سمت چپ و پایین بازسازی \bar{c} با حذف عامل خطا e_2 و نمونه سمت راست و پایین بازسازی کامل \bar{c} را نشان می‌دهند.

۸- نتیجه گیری

یک نمایش تفکیک‌پذیری چندگانه ارائه کرده‌ایم که در عین سادگی، قابل استفاده در مدل‌های هموار نیز هست. این سادگی به دلیل استفاده از تقریب موضعی برای تصویر بهینه یک مدل با تفکیک‌پذیری بالا در تفکیک‌پذیری پایین است. کارایی این تقریب با ارائه مثالهای متنوع مشخص شده است. این رهیافت به مسئله تفکیک‌پذیری چندگانه قابل تعمیم به رویه‌های با توپولوژی دلخواه نیز هست.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 4 & 4 & & & & & & & & & & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -1 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 4 & 4 & 4 & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & & & & & & & & \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 4 & 4 & & & & & & & & & & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 4 & 4 & 4 & & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \quad (25)$$

قدردانی

این کار به وسیله دانشگاه صنعتی شریف، حمایت شده است. نویسندگان از پرفسور ریچارد پارتلز نیز به خاطر حمایت‌های تأمین شده در طول دوره تحقیقاتی نویسنده اول در بخش علوم کامپیوتر و آزمایشگاه گرافیک کامپیوتری، دانشگاه واترلو، کانادا، تشکر می‌کنند.

مراجع

- [1] G. Chaikin, "An Algorithm for High Speed Curve Generation," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 3, pp. 346-349, 1974.
- [2] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
- [3] I. Daubechies, "Orthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41, No. 7, pp. 909-996, 1988.
- [4] R. DeVore, B. Jawerth, and B. Luicer, "Image Compression Through Wavelet Transform Coding," *IEEE Transaction on Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp. 719-746, 1992.
- [5] A. Finkelstein, and H. Salesin, "Multiresolution Curves," *Proceedings of SIGGRAPH 94*, 261-268, 1994.
- [6] D. Forsey, and R. H. Bartels, "Surface Fitting With Hierarchical Splines," *ACM Transaction on Graphics*, Vol. 14, No. 2, pp. 134-161, 1995.
- [7] M. Lounsbery, T. D. Derose, and J. Warren, "Multiresolution Analysis for Surface of Arbitrary Topological Type," *ACM Transaction on Graphics*, Vol. 16, No. 1, pp. 34-73, 1997.
- [8] R. Riesenfeld, "Chaikin s Algorithm," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 4, pp. 304-310, 1975.
- [9] F. F. Samavati, and R. H. Bartels, "Multiresolution Curve and Surface Representation by Reversing Subdivision Rules," *Computer Graphics Forum*, Vol. 18, No. 2, pp. 97-120, 1999.
- [10] E. J. Stollnitz, T. D. Derose, and D. H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics*, Morgan Kaufmann Publishers, 1996.
- [11] J. Warren, "Sparse Filter Banks For Binary Subdivision Schemes," In *Mathematics of Surface VII*, Editor: T. Goodman, IMA, 1996.

¹ multiresolution

² wavelet

³ FBI

⁴ jpeg

⁵ Haar

⁶ Daubechies

⁷ subdivision

⁸ Chaikin

⁹ Least Squares

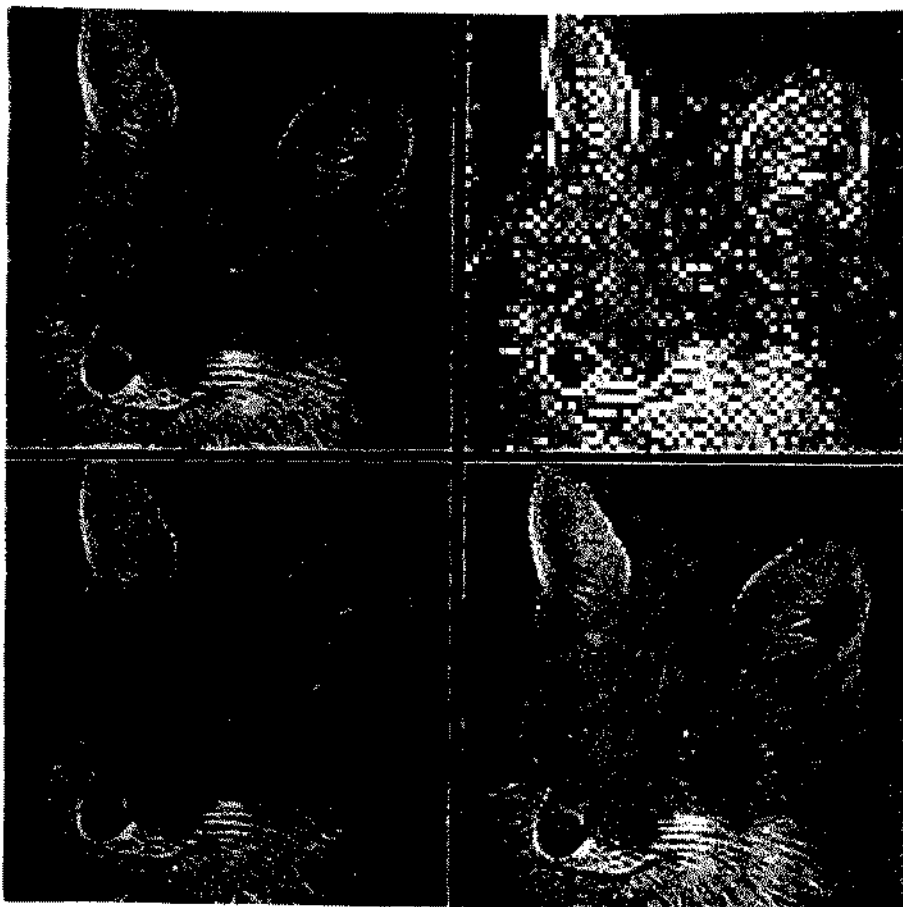
¹⁰ full

¹¹ sparse

¹² biorthogonal



شکل ۶- مقایسه بهینه یابی سراسری و موضعی



شکل ۷- تاثیر عملیات تجزیه و ترکیب روی تصویر



نظام‌الدین مهدوی امیری استاد دانشگاه صنعتی شریف در دانشکده علوم ریاضی است. او دکترای خود را از دانشگاه جانزهاپکینز در رشته علوم ریاضی در سال ۱۹۸۱ میلادی به پایان رسانده است. وی قبل از شروع کار در دانشگاه صنعتی شریف یک دوره یکساله پس دکترای

علوم کامپیوتر را، در خلال سالهای ۸۲-۱۳۸۱ در دانشگاه واترلو، کانادا گذرانده و از سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۹۰ میلادی عضو هیأت علمی علوم کامپیوتر در دانشگاه یورک، کانادا بوده است. علایق تحقیقاتی او در زمینه‌های بهینه‌سازی، محاسبات علمی و نرم‌افزار ریاضی، مدلسازی و طراحی هندسی، و محاسبات ماتریسی است. آدرس پست الکترونیکی نامبرده عبارتست از:

nezamm@sina.sharif.ac.ir



فرامرز فامیل سماواتی استادیار علوم کامپیوتر در دانشگاه‌های کلگری کانادا و دانشگاه شهید بهشتی است. وی فوق لیسانس و دکترای خود را در دانشگاه صنعتی شریف روی مدل‌سازی هندسی و گرافیک کامپیوتری، تحت نظارت دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری طی کرد. رساله

دکترای وی برنده جایزه اول علوم پایه در جشنواره جوان خوارزمی در سال ۱۳۷۹ شد. کارهای پژوهشی وی در گرافیک کامپیوتری عمدتاً شامل تفکیک پذیری چندگانه، تجزیه، موجک و مدل‌سازی اسپلاین است. او در این زمینه‌ها چندین مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی چاپ کرده است. او مسئولیت تولید تعدادی پروژه نرم‌افزاری را، از جمله نرم‌افزار خودکار چک خوان، نشر رومیزی خودآوا و کدتریس، به عهده داشته است. آدرسهای اینترنتی نامبرده عبارتند از:

www.epsc.ucalgay.ca/~samavati
samavati@epsc.ucalgary.ca