

بهینه‌سازی سبد سهام با محدودیت به کمک شبکه عصبی بر روی گرید

علی غفاری‌نژاد محمد کاظم اکبری فرهنگ نصرت‌ماکویی

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده

مسئله انتخاب سهام بدین صورت است که تعدادی سهام در دسترس می‌باشند و هدف آن است که با انتخاب بهترین روش سرمایه‌گذاری بر روی آنها و لحاظ کمترین ریسک، سود مشخصی حاصل گردد. این مسئله از نوع مسائل بهینه‌سازی در رابطه با ارضای محدودیت‌ها برای انتخاب تعدادی سهام از سبد سهام می‌باشد. روش‌های ریاضی برای یافتن راه حل بهینه مسئله انتخاب سبد سهام استاندارد یا فاقد محدودیت، براساس ریسک/بازده که توسط مارکوویتز ارائه شده است، وجود دارد. اضافه کردن بعضی محدودیت‌ها به مدل استاندارد مشکل است و باعث می‌شود این الگوریتم‌ها کارایی خود را از دست بدهند و نیاز به معرفی الگوریتم‌های جدیدی برای انتخاب بهینه سبد سهام داشته باشیم. در این مقاله روشی جدید برای حل مسئله بهینه‌سازی سبد سهام استاندارد و بهینه‌سازی سبد سهام همراه با محدودیت با استفاده از شبکه عصبی ریاضی ارائه می‌گردد. محدودیت‌هایی که مد نظر قرار می‌دهیم عبارتند از (۱) حد بالا و پایین در انتخاب وزن هر سهم در سبد سهام و (۲) محدودیت در تعداد سهام‌های موجود در سبد سهام. محدودیت سوم هم این است که مجموع وزن سهام‌های موجود در سبد سهام برابر یک گردد. در قدم بعدی گرید محاسباتی برای افزایش سرعت الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌گردد. نتایج پیاده‌سازی الگوریتم، نشان می‌دهد مدل ارائه شده قادر به انتخاب بهینه سبد سهام دارای محدودیت با شیوه‌ای کارآمد و در زمان کوتاه می‌باشد.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی، سبد سهام، شبکه عصبی، جبهه کارا، گرید.

۱- مقدمه

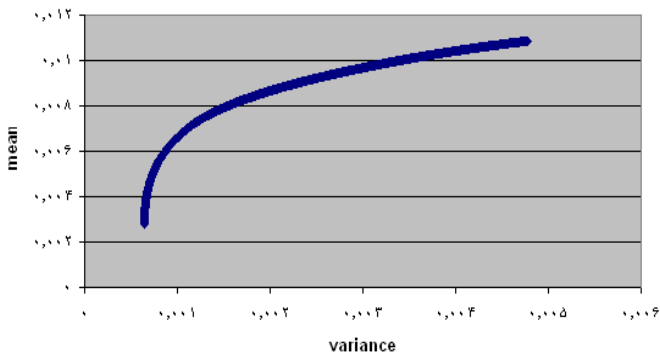
عایدی مورد انتظار^۲ به صورت میانگین وزنی عایدی هر یک سهام تشکیل دهنده سبد سهام محاسبه می‌شود. وزن هر کدام از سهام نسبت سرمایه‌گذاری بر روی آن سهم در سبد سهام است. معادله (۱) فرمول محاسبه عایدی مورد انتظار سهام را نشان می‌دهد.

$$\mu_p = E\left(\sum_{i=1}^n w_i \rho_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i \rho_i \quad (1)$$

واریانس یک سبد سهام از معادله (۲) محاسبه می‌شود. با استفاده از روش‌های تحلیلی می‌توان مدل استاندارد ریسک/عایدی مورد انتظار را کاملاً تحلیل نمود. مشکل این مدل در اینست که هیچ محدودیتی را در نظر نمی‌گیرد [۲]. مسئله‌ای که ما در این مقاله مدنظر قرار می‌دهیم بدست آوردن سبد سهام بهینه با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی بدین شرح است:

پس از آنکه هاپفیلد در سال ۱۹۸۲ مدل شبکه عصبی خود را ارائه نمود، این مدل با موفقیت در زمینه‌های مختلف بهینه‌سازی مانند مسئله فروشنده دوره‌گرد، چند و زیر و زمان‌بندی منابع بکار گرفته شده است [۱]. بسیاری از سهامداران یک سبد سهام را انتخاب می‌کنند تا ریسک سرمایه‌گذاری را کاهش دهند. در مسئله بهینه‌سازی سبد سهام با محدودیت، فرض بر این است که تعدادی سهام برای انتخاب وجود دارند. هدف ما انتخاب بهینه یک سبد سهام با توجه به ریسک و عایدی مورد انتظار است. سبدهای سهامی که به ازای عایدی مورد انتظار مشخص، کمترین ریسک را دارا هستند جبهه‌های تشکیل می‌دهند که به نام جبهه کارا^۱ شناخته می‌شود [۲، ۳].

حل مسئله بهینه‌سازی پورتفولیوی با محدودیت مورد استفاده قرار دادیم در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱- جبهه کارای استاندارد داده‌های تست

۳- انتخاب سبد سهام با محدودیت

فرض کنید علاوه بر پارامترهای تعریف شده در بخش ۲ داشته باشیم:

K تعداد سهامهای مورد دلخواه در سبد سهام

ε_i حداقل درصد یک سهم در سبد سهام

δ_i حداکثر درصد یک سهم در سبد سهام

با توجه به مفروضات مسئله داریم: $0 \leq \varepsilon_i \leq \delta_i \leq 1$

$z_i = 1$ در صورتیکه سهم i ام در سبد سهام موجود باشد، و

$z_i = 0$ در صورتیکه سهم i ام در سبد سهام موجود نباشد. در اینصورت مسئله

انتخاب پورتفولیو با محدودیت بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right]$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K$$

$$\varepsilon_i z_i \leq w_i \leq \delta_i z_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$z_i \in [0, 1] \quad i = 1, \dots, N$$

(۴)

مسئله فوق یک مسئله ترکیبی از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی درجه دوم

است که الگوریتم کارایی برای حل آن وجود ندارد [۲، ۴].

چانگ در سال ۱۹۹۹ الگوریتم‌های ژنتیک، جستجوی ممنوع و آنیلینگ شبیه‌سازی شده را برای حل این مسئله بکار برد و نتایج این روش‌ها را با یکدیگر مقایسه نمود [۲]. فرناندز نیز در سال ۲۰۰۴ الگوریتمی مبتنی بر شبکه عصبی هاپفیلد را برای حل مسئله پیشنهاد نمود. فرناندز این محدودیت را که مجموع وزن‌ها در سبد سهام باید برابر یک باشند را لحاظ نکرده بود و برای ارضای این محدودیت از الگوریتم حریمانه معرفی شده توسط چانگ، استفاده نموده بود [۴].

در این مقاله ما قصد داریم با بهبود مدل بکار رفته توسط فرناندز، محدودیت فوق را در شبکه هاپفیلد اعمال کنیم. در انتها صحت عملکرد مدل ارائه شده را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱- تعداد سهام‌های موجود در سبد سهام برابر عدد K باشد

۲- وزن هر سهم در سبد سهام در محدوده یک مقدار کمینه و یک مقدار

بیشینه قرار گیرد.

$$\sigma_p^2 = E(|\rho_p - \mu_p|^2) = E\left(\left|\sum_{i=1}^n w_i (\rho_i - \mu_i)\right|^2\right) =$$

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n w_i (\rho_i - \mu_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n w_j (\rho_j - \mu_j)\right)\right) =$$

$$\sum_{i,j=1}^n w_i w_j E((\rho_i - \mu_i)(\rho_j - \mu_j)) =$$

$$\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

(۲)

کارهای قبلی انجام شده در این زمینه، مسئله فوق را با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، جستجوی ممنوع^۳، آنیلینگ شبیه‌سازی^۴ شده و شبکه هاپفیلد^۵ حل کرده‌اند. ما در این مقاله روش جدیدی مبتنی بر شبکه هاپفیلد برای حل مسئله فوق ارائه می‌دهیم.

تفاوت روش ما با شبکه هاپفیلدی که فرناندز و گومز در مرجع [۲] ارائه نموده‌اند در اینست که آنها این محدودیت را که مجموع وزنی سهام‌ها در سبد سهام باید برابر یک باشد را در نظر نگرفته‌اند و برای ارضای این شرط از الگوریتم حریمانه چانگ [۳] استفاده کرده‌اند. در این مقاله ما از روش ریاضی شبکه‌های عصبی که در مرجع [۱] معرفی شده است استفاده کرده‌ایم.

۲- انتخاب سبد سهام

در ابتدا مدل ریسک/عایدی مورد انتظار برای انتخاب پورتفولیو که توسط مارکوویتز معرفی گردید، ارائه می‌شود [۳]. فرض کنید N تعداد سهام‌های مختلف، μ_i عایدی مورد انتظار برای سهم i ام و σ_{ij} کواریانس بین عایدی سهام‌های i و j باشد. ضمناً فرض کنید $\lambda \in [0, 1]$ پارامتری باشد که وزن ریسک و عایدی مورد انتظار را در انتخاب سبد سهام بهینه تعیین می‌کند. مدل استاندارد ریسک/عایدی مورد انتظار برای مسئله انتخاب سبد سهام عبارتست از:

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right]$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, N$$

(۳)

حالتی که $\lambda = 0$ ، وضعیتی را نشان می‌دهد که قصد داریم بدون در نظر گرفتن ریسک، عایدی مورد انتظار را بیشینه کنیم. حالتی که در آن $\lambda = 1$ است نیز نشان دهنده وضعیتی است که ما بایم بدون در نظر گرفتن عایدی مورد انتظار، ریسک را کمینه نماییم. مسئله انتخاب سبد سهام بهینه جزء مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است.

در این مسائل، یک راه‌حل را بهینه گوئیم اگر هیچ راه حل امکان‌پذیر دیگری وجود نداشته باشد که یک هدف را بهبود ببخشد مگر آنکه باعث بدتر شدن هدف/اهداف دیگر گردد [۴، ۸].

معمولاً مسائل بهینه‌سازی چندهدفه بجای یک جواب، دارای یک مجموعه جواب هستند که به این مجموعه جواب، جبهه کارا اطلاق می‌گردد. بعنوان مثال جبهه کارای مدل استاندارد ریسک/عایدی مورد انتظار برای داده‌هایی که ما برای

۴- شبکه عصبی هاپفیلد

شبکه عصبی هاپفیلد مدلی است که برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. دو نوع مدل شبکه عصبی هاپفیلد که مورد استفاده قرار می‌گیرند مدل گسسته و مدل پیوسته هستند. در مدل گسسته، هر نرون دو وضعیت دارد. ورودی‌ها به هر نرون از دو منبع سرچشمه می‌گیرند. یکی از منابع عبارتست از ورودی‌های خارجی و منبع دیگر عبارتست از سایر نرون‌ها.

$$U_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N T_{ij} V_j + I_i \quad (5)$$

در این رابطه U_i کل ورودی به نرون i ، T_{ij} وزن سیگنال ارسالی از نرون j به نرون i ، I_i ورودی خارجی به نرون i و V_j خروجی نرون j است. تابع انرژی شبکه عصبی هاپفیلد بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N T_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^N I_i V_i + \sum_{i=1}^N \theta_i V_i \quad (6)$$

تغییر در انرژی ΔE ناشی از تغییر در وضعیت نرون i از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\Delta E = - \left[\sum_{i=1, i \neq j}^N T_{ij} V_i + I_i - \theta_i \right] \Delta V_i \quad (7)$$

در رابطه فوق، ΔV_i تغییرات خروجی نرون i را نشان می‌دهد.

۵- شبکه عصبی هاپفیلد پیوسته

مدل پیوسته شبکه عصبی هاپفیلد بر پایه متغیرهای پیوسته است. تابع ورودی/خروجی یک تابع افزایشی و پیوسته است. مدل پیوسته، برای حل مسئله انتخاب سبد سهام بهینه مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

خروجی هر نرون از روی رابطه $V_i = g_i(U_i)$ بدست می‌آید. $g_i(U_i)$ تابع ورودی/خروجی نرون I است و توسط رابطه زیر بدست می‌آید.

$$g_i(U_i) = \frac{1}{(1 + e^{(-\beta U_i)})} \quad (8)$$

β شکل تابع سیگموئید را مشخص می‌کند.

تابع انرژی شبکه عصبی هاپفیلد طبق رابطه زیر تعریف می‌شود [۵، ۶، ۷].

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N T_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^N I_i V_i \quad (9)$$

۶- تطبیق مسئله بر روی شبکه هاپفیلد

حل مسئله بهینه‌سازی با ارضای محدودیت نیازمند انتخاب یک بازنمایی مناسب از مسئله و انتخاب وزن‌های مناسب است. برای اینکه قابلیت شبکه‌های عصبی در

حل مسئله سبد سهام نشان دهیم مسئله را با دو محدودیت حل می‌کنیم. اولین محدودیت این است که مجموع وزن‌ها باید برابر یک باشد. محدودیت دوم این است که وزن هر یک از سهام باید بین صفر و یک باشد. برای حل مسئله انتخاب بهینه پورتفلیو باید تابع هدف را معادل تابع انرژی شبکه هاپفیلد قرار دهیم تا وزن‌های شبکه عصبی بدست آیند. تابع هدف ما طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$E_T = A \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - A(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right] + B \left(\sum_{i=1}^N w_i - 1 \right)^2 \quad (10)$$

در رابطه فوق، $B \left(\sum_{i=1}^N w_i - 1 \right)^2$ محدودیتی را بیان می‌کند که در آن باید

مجموع وزن هر کدام از سهام برابر یک باشد. بدیهی است هر قدر مجموع وزنهای سهام به یک نزدیکتر باشد، E_T کوچکتر خواهد بود. از طرفی دیگر هر چقدر مجموع وزن سهام از یک فاصله داشته باشد مقدار E_T افزایش خواهد یافت و در نتیجه مقدار تابع انرژی افزایش می‌یابد.

در ادامه برای تطبیق این تابع انرژی با رابطه (۹)، جمله آخر آن را باز می‌کنیم و به رابطه (۱۱) می‌رسیم.

$$E_T = A \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - A(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right] + B \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^2 - 2B \left(\sum_{i=1}^N w_i \right) + B \quad (11)$$

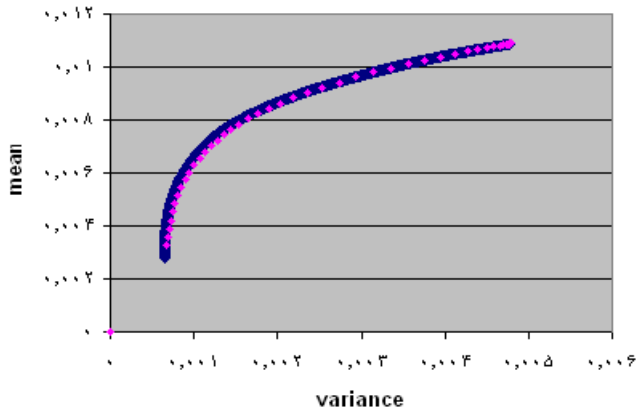
با برخی عملیات ساده ریاضی (ترکیب جمله سوم و چهارم)، رابطه فوق به رابطه (۱۲) تبدیل خواهد شد:

$$E_T = A \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - A(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right] + B \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \right) - 2B \left(\sum_{i=1}^N w_i \right) + B \quad (12)$$

در نهایت برای تطبیق رابطه فوق با رابطه (۹) پس از ساده‌سازی به رابطه (۱۳) را خواهیم رسید. که رابطه (۱۳) بسیار شبیه رابطه (۹) است.

$$E_T = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j (A \lambda \sigma_{ij} + B) \right] - \left[\sum_{i=1}^N w_i (A \mu_i - A \lambda \mu_i + 2B) \right] + B \quad (13)$$

آخرین جمله در رابطه (۱۳) اثری در تابع مینیمم‌کننده ندارد زیرا یک مقدار ثابت است. با برابر قرار دادن جملات اول و دوم رابطه‌های (۹) و (۱۳) ما می‌توانیم وزن نرونهای شبکه هاپفیلد را به محاسبه کنیم. وزن نرن‌های شبکه هاپفیلد در رابطه (۱۴) نشان داده شده است.



شکل ۲- نتایج بدست آمده روی شاخص Hang Seng

۸- نتیجه‌گیری

همانطور که قبلاً اشاره شد، فرناندز و گومز برای ارضای محدودیت (۵) از الگوریتم حریمانه چانگ استفاده می‌کنند. این الگوریتم بهینه نیست و همیشه دارای جواب نمی‌باشد [۲]. بنابراین با جایگزینی الگوریتمی که در این مقاله معرفی گردید، قادر خواهیم بود اولاً مسئله ارضای محدودیت را توسط شبکه عصبی در نظر بگیریم و نیاز به الگوریتم جداگانه برای این منظور نخواهد بود و ثانیاً مشکلات الگوریتم حریمانه در مدل ارائه شده در این مقاله وجود ندارد.

مراجع

- [1] Y. Takefuji, *Neural Network Parallel Computing*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] A. Fernandez, *Portfolio Selection Using Neural Network*, Computers and Operation Research, 2004.
- [3] T. J. Chang, *Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation*, Computers And Operation Research, 2000.
- [4] H. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal Of Finance*, 1952.
- [5] F. Fausett, *Fundamentals of Neural Networks*, Prentice Hall, 1994.
- [6] J. H. Parker, "Economic Load Dispatch For Piecewise Quadratic Cost Function Using Hopfield Neural Network," *IEEE Transactions On Power System Apparatus and Systems*, vol 8, no 3, pp.1030-1038, 1993.
- [7] J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," *proceedings of National Academy Of Science, USA*, vol 81, pp 3088-3092, 1984.
- [8] E. Zitzler, *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods And Applications*, Swiss Federal Institute Of Technology, 1999.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -2(A\lambda\sigma_{ij} + B) \\ I_i &= (A\mu_i - A\lambda\mu_i + 2B) \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به تابع انرژی، معادله حرکت عبارت خواهد بود از:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^N T_{ij}V_j + I_i \quad (15)$$

برای بهنگام سازی هر نرون از رابطه اولر مرتبه اول استفاده می‌شود.

$$u_i(t+1) = u_i(t) + \Delta u_i \quad (16)$$

بدین ترتیب با توجه به معلوم بودن σ_{ij} و μ_i در صورت بدست آوردن مقدار مناسب A و B ، وزن‌های مورد نیاز شبکه بدست خواهد آمد. مقادیر A و B از روی داده‌های تاریخی بدست می‌آیند.

به دلیل اینکه وزن‌های سهام در مسئله به صورت پیوسته تغییر می‌کنند ما نیازمند یک تابع ورودی- خروجی پیوسته هستیم. بنابراین ما می‌توانیم از تابع سیگموئید به عنوان تابع ورودی برای ارضای محدودیت دوم مسئله که در آغاز این بخش به آن اشاره شده استفاده کنیم. این محدودیت وزن هر یک از نرون‌ها محدود می‌کند.

$$v_i = g_i(u_i) = \varepsilon_i + \frac{\delta_i - \varepsilon_i}{1 + \exp(\beta u_i)} \quad (17)$$

این رابطه باعث می‌شود خروجی هر نرون بین مقادیر ε_i و δ_i قرار گیرد. β شیب تابع سیگموئید را مشخص می‌نماید.

۷- نتایج

با توجه به اینکه مسئله انتخاب پورتفلیو بدون محدودیت دارای روش‌های تحلیلی برای حل مسئله است، برای بررسی صحت الگوریتمی که ارائه کرده‌ایم، آنرا برای حل مسئله پورتفلیوی بدون محدودیت، بکار بردیم یعنی با فرض $K=N$ و $\varepsilon_i = 0$ و $\delta_i = 1$ مسئله انتخاب پورتفلیو را با الگوریتم ارائه شده حل نمودیم.

برای اینکار سری داده‌ها مربوط به شاخص Hang Seng هنگ کنگ را مورد استفاده قرار دادیم. داده‌های تست از مسیر <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/orlib/portinfo.html> قابل دستیابی است.

برای این منظور ۵۱ مقدار مختلف λ بین صفر و یک با طول گام ۰.۰۲ انتخاب گردید و برای هر یک از این مقادیر، مسئله انتخاب پورتفلیو با الگوریتم ارائه شده، حل شد و ۵۱ جواب برای این مسئله بدست آمد. شکل ۲ مجموعه جواب‌های بدست آمده برای این مسئله را نشان می‌دهد.

خط پیوسته مجموعه کارا که توسط روش‌های تحلیلی بدست آمده و از طریق آدرس فوق قابل دستیابی است را نشان می‌دهد. نقاط گسسته، مجموعه جواب‌های بدست آمده با توجه به الگوریتم پیشنهادی ما می‌باشد که همانطور که مشاهده می‌شود روی مجموعه کارا قرار گرفته‌اند و این مسئله کارایی الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.



علی غفاری نژاد دارای مدرک کارشناسی مهندسی کامپیوتر گرایش نرم افزار از دانشگاه صنعتی امیرکبیر و کارشناسی ارشد مهندسی فناوری اطلاعات گرایش تجارت الکترونیک از دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. وی در حال حاضر دانشجوی دکترا مهندسی فناوری اطلاعات در دانشگاه صنعتی امیرکبیر است.

آدرس پست الکترونیکی ایشان عبارت است از:

ghaffarinejad@aut.ac.ir



محمد کاظم اکبری دارای مدرک دکترا مهندسی کامپیوتر از دانشگاه Case Western Reserve و دانشیار و عضو هیئت علمی دانشگاه امیرکبیر، دانشکده کامپیوتر و فن آوری اطلاعات است. زمینه های پژوهشی ایشان عبارتند از: معماری کامپیوتر، شبکه های عصبی، پردازش موازی، طراحی VLSI، آزمون و تشخیص خطا.

آدرس پست الکترونیکی ایشان عبارت است از:

akbarif@aut.ac.ir



فرهنگ نصرت ماکویی دارای مدرک کارشناسی مهندسی کامپیوتر گرایش سخت افزار از دانشگاه صنعتی شریف و کارشناسی ارشد مهندسی فناوری اطلاعات گرایش تجارت الکترونیک از دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. زمینه های پژوهشی مورد علاقه وی عبارتست از: محاسبات نوری، سیستم عامل، شبکه های کامپیوتری، سیستم عامل، امنیت شبکه و سیستم های پایگاه داده.

آدرس پست الکترونیکی ایشان عبارت است از:

makuee@aut.ac.ir

اطلاعات بررسی مقاله:

تاریخ ارسال: ۹۰/۲/۲۸

تاریخ اصلاح: ۹۰/۱۲/۱

تاریخ قبول شدن: ۹۰/۱۲/۱۰

نویسنده مرتبط: دکتر محمد کاظم اکبری، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

¹ Efficient Frontier

² Expected Return

³ Taboo Search

⁴ Simulated Annealing

⁵ Hopfield